

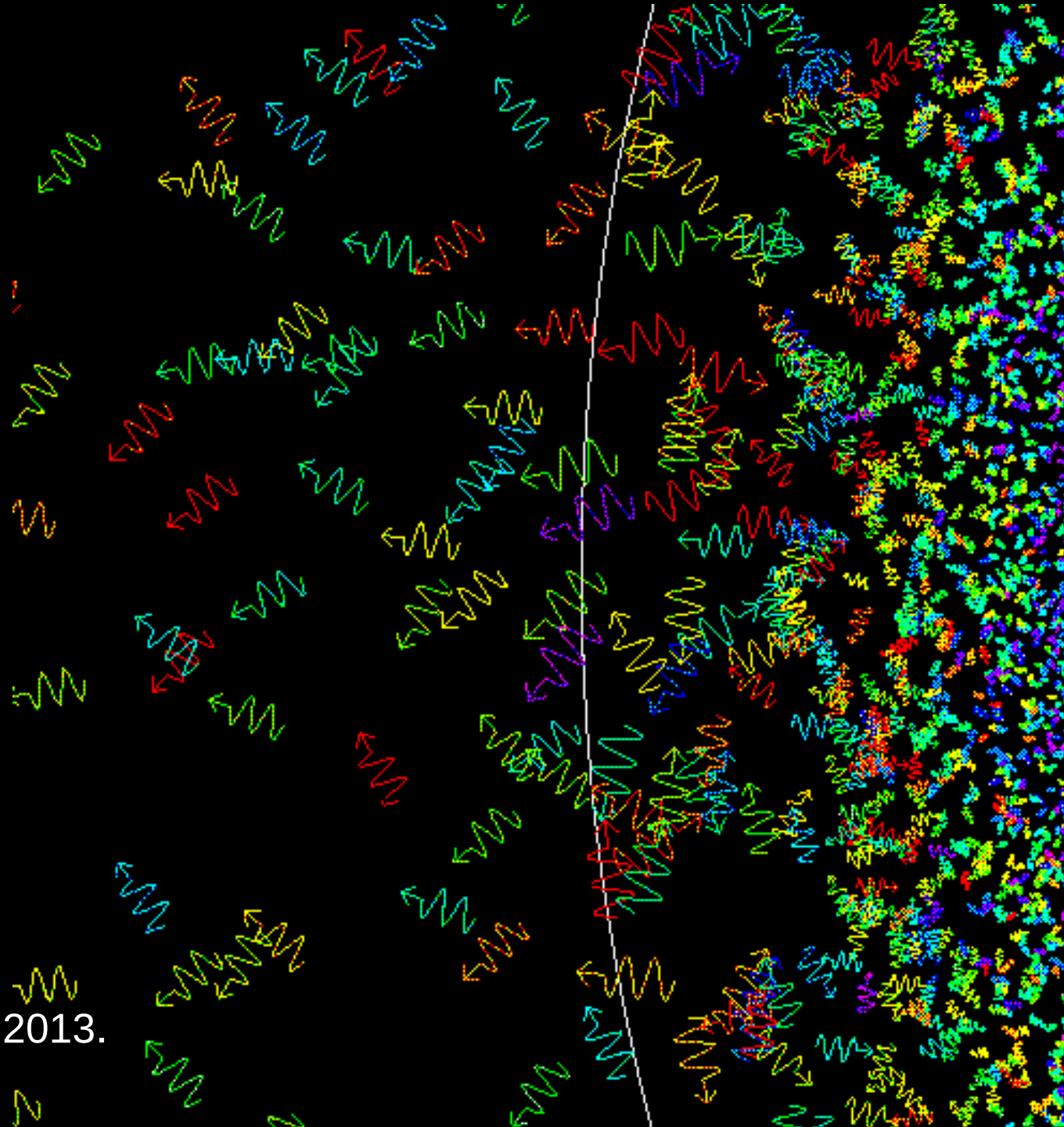
PRENOS ZRAČENJA U MODERNOJ ASTROFIZICI

Ivan Milić

Irena Pirković

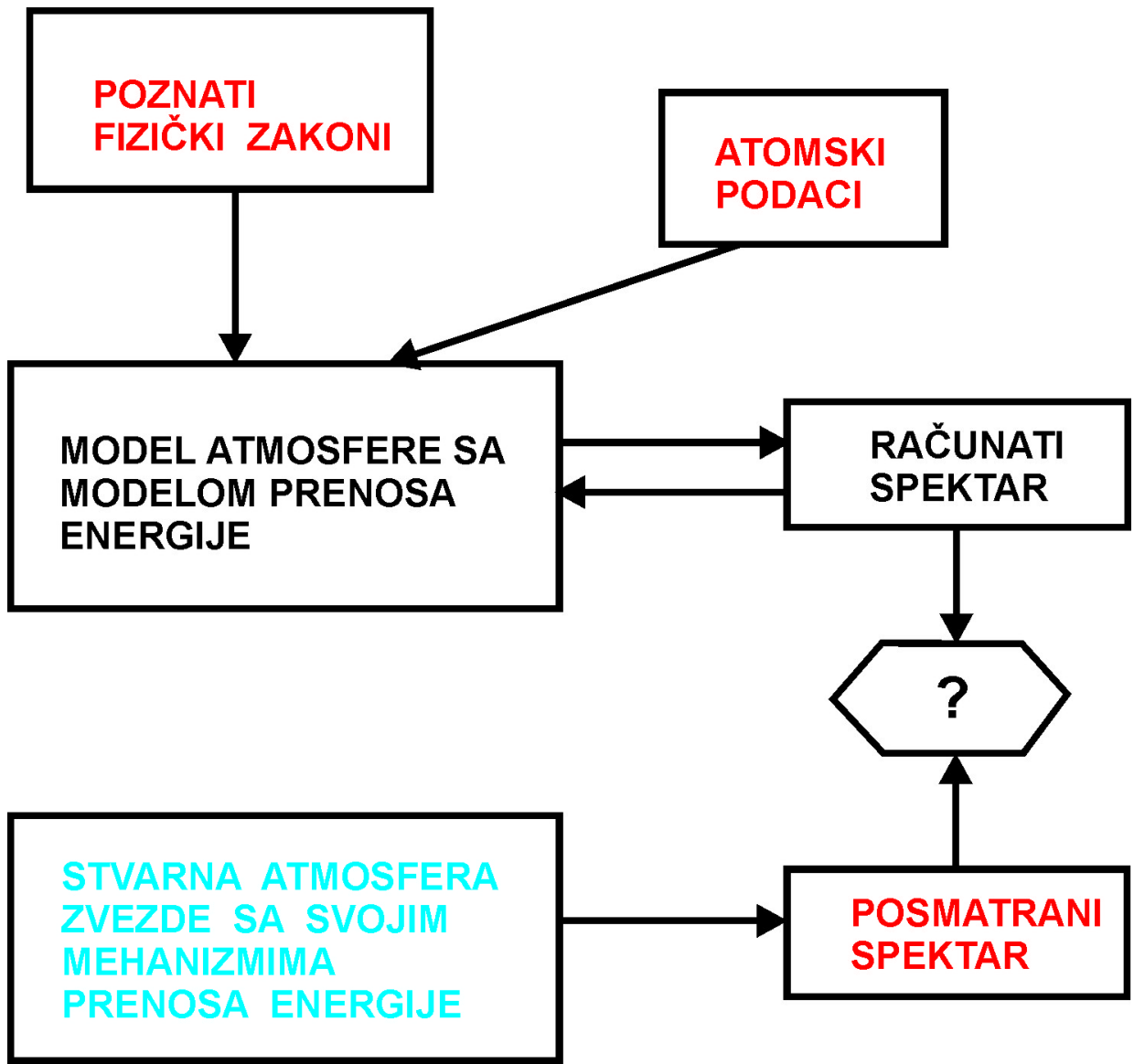
Olga Atanacković

Seminar Katedre za
astronomiju, 2. april 2013.



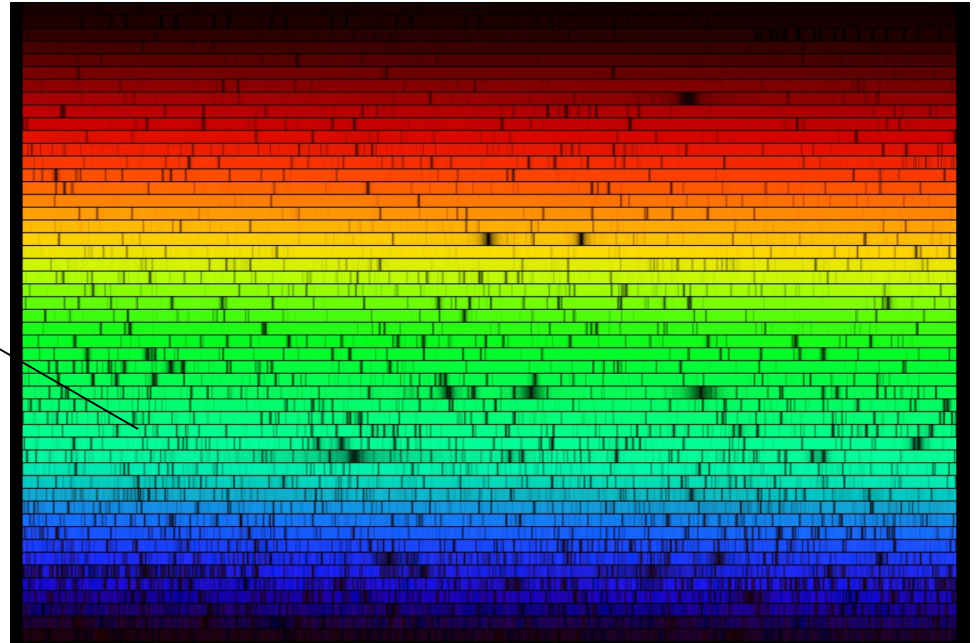
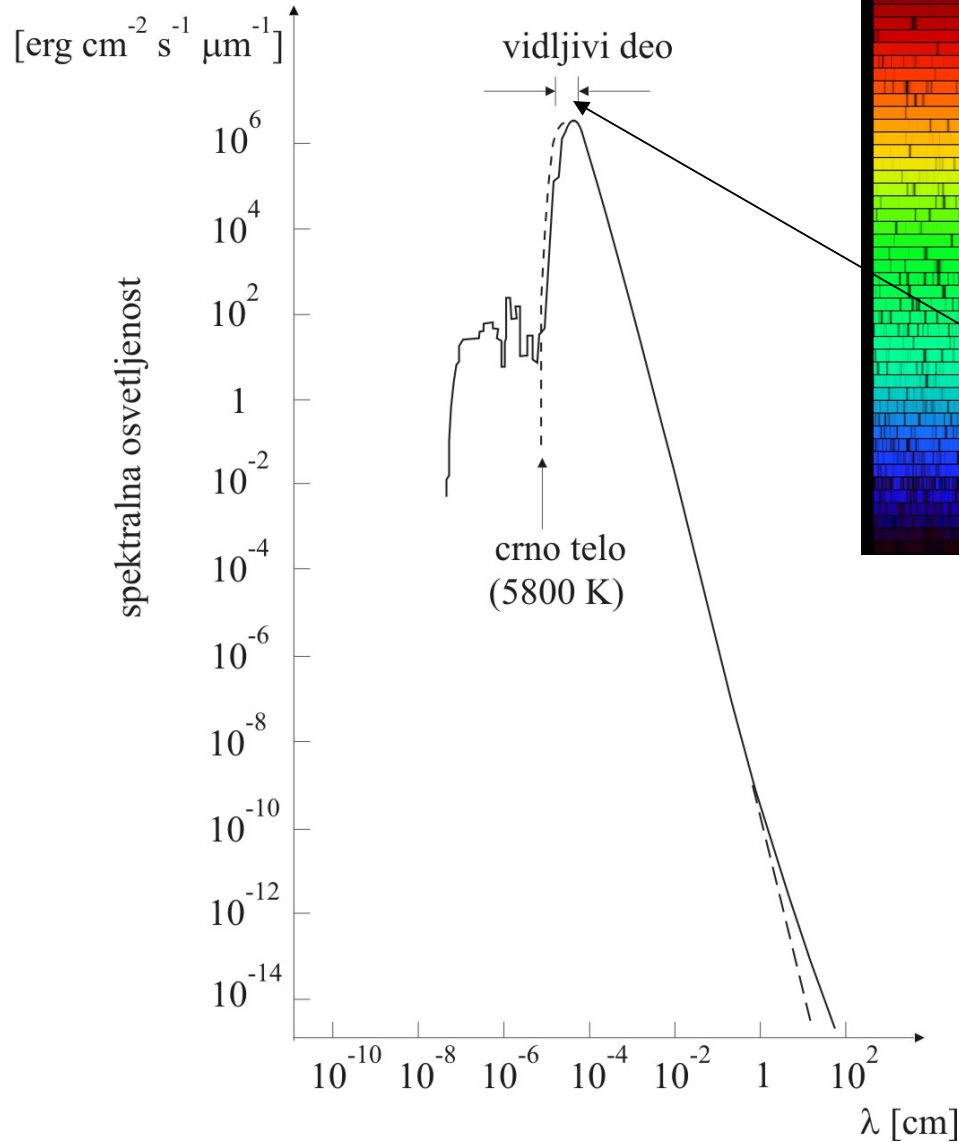
Prenos zračenja

- **Zračenje:**
 - osnovni izvor informacija o dalekim nebeskim telima i njihovoj prirodi
 - sredstvo za dijagnostiku njihovih osobina
 - utiče na strukturu sredine kroz koju prolazi
- **Prenos zračenja** je u osnovi mnogih astrofizičkih problema.
Značajan fizički fenomen, koji često zvuči dosadno... 😊
- Od značaja i u fizici plazme, atmosfere, transportu neutrona, medicini, arhitekturi, filmskoj industriji, ... u svim oblastima gde se svetlost koristi ili kao dijagnostičko sredstvo ili sredstvo za modeliranje.
- Interpretirati posmatrano zračenje znači:
 - **modelirati objekat** koji zrači i
 - **modelirati prenos zračenja** = pretpostaviti model interakcije zračenja i materije.



Obično se struktura objekta ne može izvesti direktno iz njegovog spektra ili krive sjaja !

Spektralna raspodela Sunčevog zračenja



Značaj izučavanja prenosa zračenja u spektralnim linijama,
tj. formiranja spektralnih linija:

- za određivanje strukture atmosfere - analizom jačine i oblika spektralnih linija (uključujući aktivnost – emisione linije)
- za određivanje zastupljenosti,
- za dijagnostikovanje zvezdanih oscilacija (asteroseizmologija),
- za analizu konvekcije (bisektori),
- za određivanje magnetnih polja (Zeemanov i Hanle efekat),
- kao činioca hladjenja i zagrevanja u uspostavljanju energetske ravnoteže.

Prenos zračenja povezuje **mikroskopske procese interakcije fotona** sa atomima, jonima i molekulima i **makroskopske parametre** kao što je **izlazni fluks zračenja**.

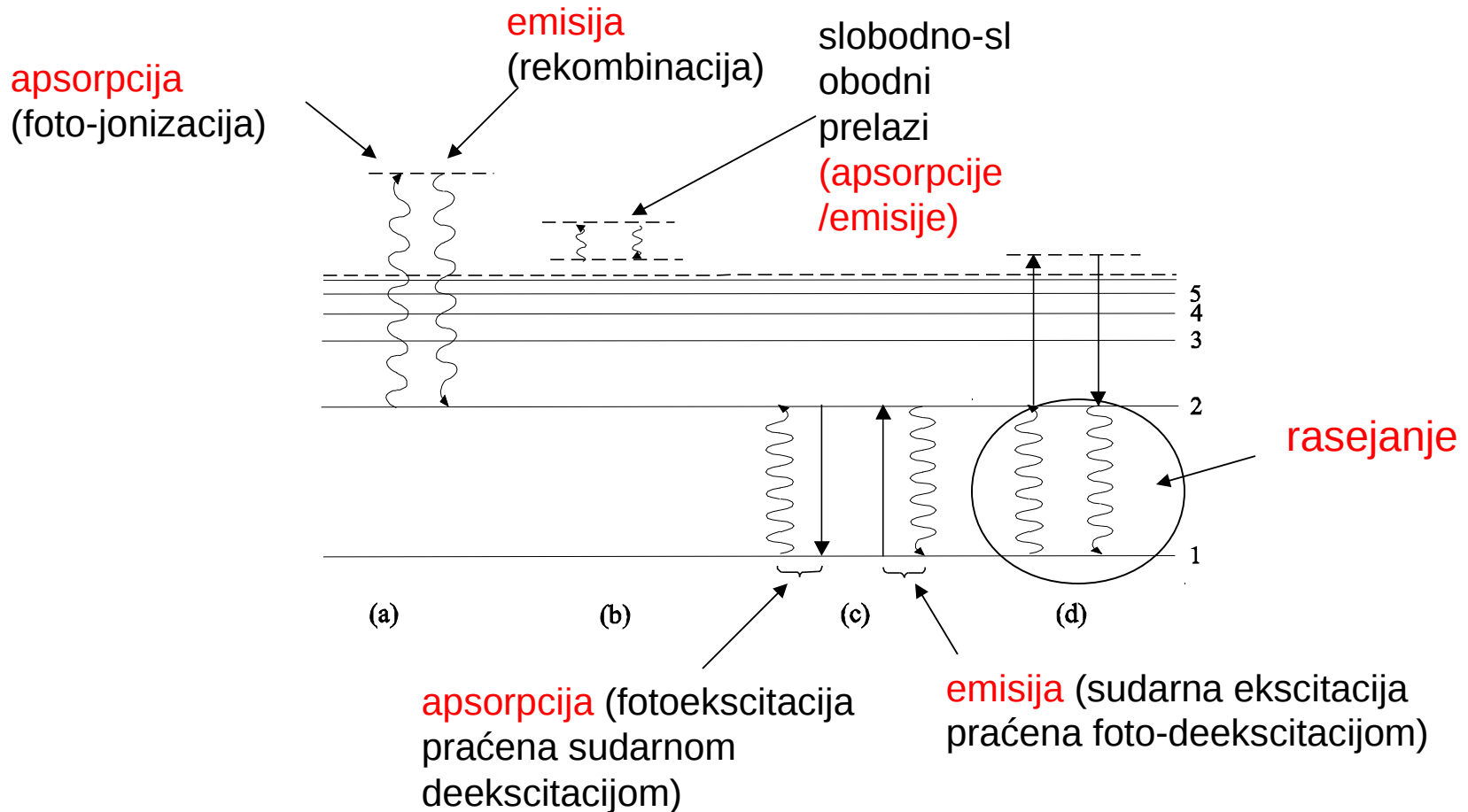
IZLAZNI FLUKS ZRAČENJA

$$\boxed{F_{\nu}^{+}(0)} = 2 \int_0^1 I_{\nu}^{+}(0, \mu) \mu d\mu = 2 \int_0^{\infty} \boxed{S_{\nu}(t_{\nu})} E_2(t_{\nu}) dt_{\nu}$$

Interakcija zračenja i materije (mikroskopski prikaz)

Tri osnovna procesa:
apsorpcija, emisija i rasejanje

neki primeri:



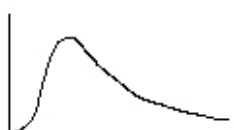
Hot
Background
Source



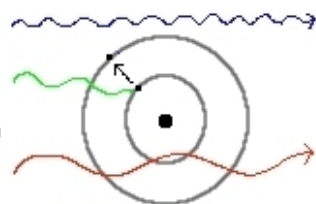
Cool
Foreground
Gas



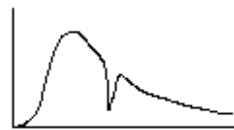
You!



Continuum
Emission



Cool Atoms
Absorb
Some Light



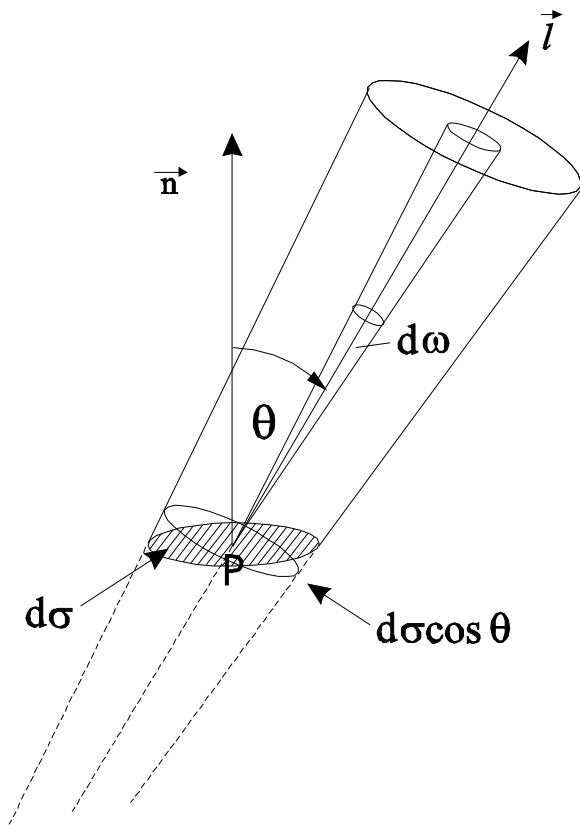
Continuum
Emission
with an
Absorption
Line

U čemu je problem?

U razumevanju
osnovne fizike?

Uglavnom je dobro
poznata...

Specifični intenzitet zračenja



$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma \cos \theta d\nu d\omega dt$$

Funkcija je 7 promenljivih:

- 3 prostorne koordinate (x,y,z),
- 2 ugla (θ, φ),
- frekvencije (ν) i
- vremena (t).

Sa gridom od 100 tačaka za svaku promenljivu potrebno je izračunati 10^{12} brojeva za svaki trenutak! **Neophodna pojednostavljenja!**



stacionarnost,
statičnost,
1D geometrija

} $I(z, \theta, \nu)$

Jednačina prenosa zračenja u plan-paralelnoj, stacionarnoj i statičnoj sredini

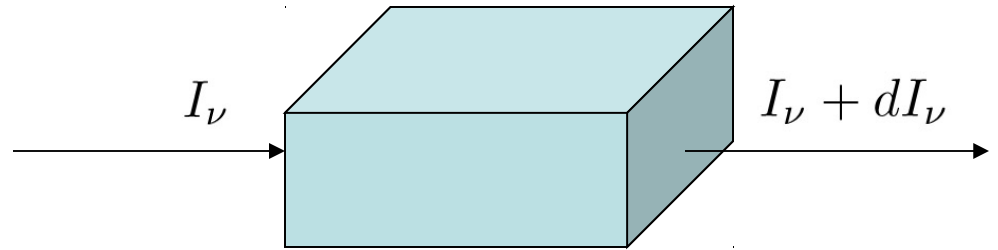
$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu I_\nu + \eta_\nu$$

koeficijent
ekstinkcije

koeficijent
emisije

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI_\nu}{ds} > 0 \text{ ako } \eta_\nu > \chi_\nu I_\nu \\ \frac{dI_\nu}{ds} < 0 \text{ ako } \eta_\nu < \chi_\nu I_\nu \end{array} \right.$$

$$\frac{dI_\nu}{\chi_\nu ds} = -I_\nu + \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$$



I_ν raste ako $S_\nu > I_\nu$

I_ν opada ako $S_\nu < I_\nu$

$I_\nu = \text{const}$ ako $S_\nu = I_\nu$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

Evolucija spektra SN 1987A

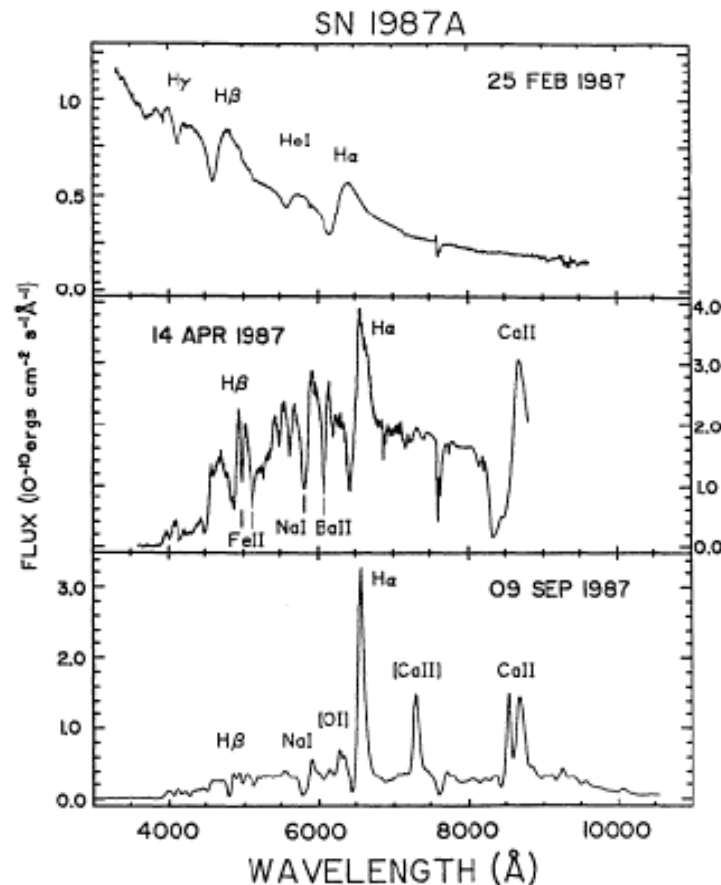


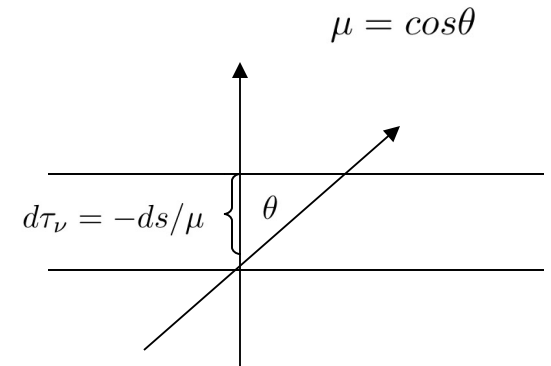
Figure 2 The optical spectrum of SN 1987A at three different epochs: (a) February 25, 1987, only 40 hr after core collapse. Note the broad profiles of the hydrogen and helium lines and the large blueshifts of the P Cygni absorption components. (b) April 14, 1987, 50 days after core collapse. The spectrum is now dominated by lines of low ionization elements. Note the strength of the barium line at 6142 Å. (c) September 9, 1987, more than 100 days after the maximum of the bolometric light curve. The spectrum has by this time taken on more of a nebular appearance, with strong emission lines of hydrogen, oxygen, calcium, and sodium dominating [observations from Cerro Tololo Inter-American Observatory; figure from (359)].

TR:

$$I_\nu = S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

LTR:

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = B_\nu(T), \quad I_\nu \neq B_\nu(T)$$



$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - B_\nu(T(\tau_\nu))$$

sistem NF x NM običnih
diferencijalnih jednačina

Ne-LTR:

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu)$$

$$S(\tau_\nu) = \varepsilon B(\tau_\nu) + (1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\nu d\nu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu$$

sistem NF x NM **integro-diferencijalnih** jednačina

Formiranje spektralnih linija za dati model sredine

- Jednačina prenosa zračenja za svaki prelaz u liniji ij u statičnoj, plan-paralelnoj atmosferi bez kontinuuma:

$$\mu \frac{dI_{x\mu}^{ij}}{d\tau} = \varphi_x (I_{x\mu}^{ij} - S^{ij})$$

$$S^{ij} = \frac{n_j A_{ji}}{n_i B_{ij} - n_j B_{ji}} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_i}{n_j} \frac{g_j}{g_i} - 1}$$

- Jednačine statističke ravnoteže za svaki atomski nivo n_j :

$$\frac{n_j}{n_j} \left\{ \sum_{i < j} (A_{ji} + B_{ji} \underline{J_{\varphi}^{ij}} + C_{ji}) + \sum_{k > j} (B_{jk} \underline{J_{\varphi}^{jk}} + C_{jk}) \right\} =$$

$$\sum_{i < j} \underline{n_i} (B_{ij} \underline{J_{\varphi}^{ij}} + C_{ij}) + \sum_{k > j} \underline{n_k} (A_{kj} + B_{kj} \underline{J_{\varphi}^{jk}} + C_{kj})$$

$$\left. \vphantom{\sum_{i < j}} \right\} \mathbf{P}\bar{n} = \bar{b}$$

$$\sum_{i=1}^{NL} n_i = n_{\text{tot}}$$

$$\underline{J_{\varphi}^{ij}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x \underline{J_x(\tau)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x dx \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underline{I_{x\mu}(\tau)} d\mu$$

Dva osnovna problema prenosa zračenja

Redukovani problem: formiranje spektra za dati model sredine - rešavanje jednačina prenosa zračenja i jednačina statističke ravnoteže (stotine atomskih nivoa atoma/jona, desetine jonizacionih stanja nekih elemenata, ...)

Globalni problem: modeliranje sredine - zahteva rešavanje gornjih jednačina zajedno sa uslovima hidrostatičke i energetske ravnoteže.

Dakle, ...

- Prenos zračenja je **nelokalan i nelinearan** problem. **Potrebne su efikasne i brze numeričke metode** za njegovo rešavanje.
- **Sredina koja emituje - nepoznata** (tačkasti emiteri ili komplikovane strukture). Modeli i fitovanja (AGN, SN, TDS, komplikovane strukture na zvezdama..).
- **Nedovoljno tačni atomski podaci.**

Jednačina prenosa zračenja je tokom skoro jednog veka korišćena u vrlo jednostavnom obliku (Schuster 1905).

Modeliranja na osnovu modernih posmatranja (nove tehnike i izuzetno visoka spektralna i prostorna rezolucija)

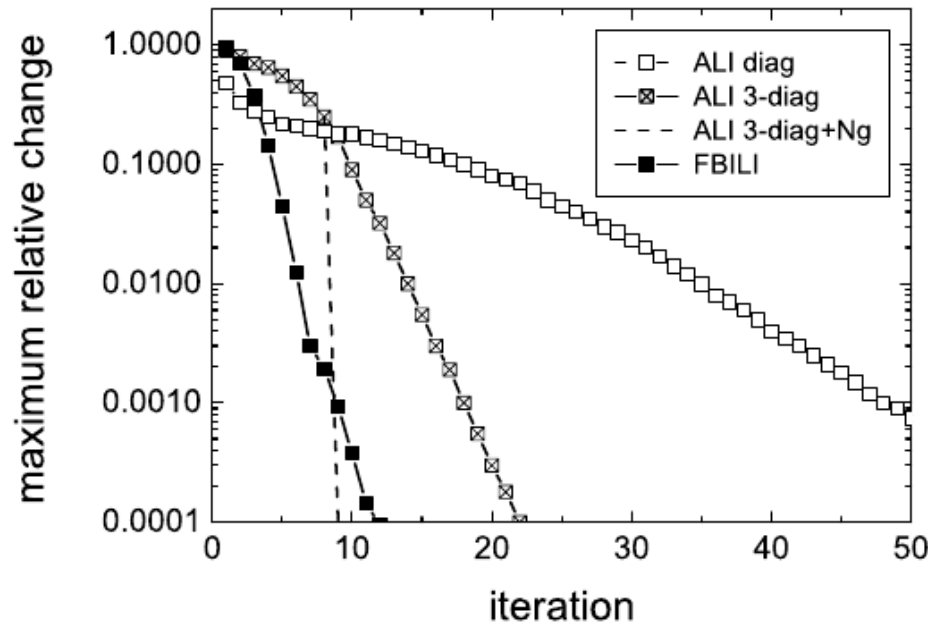
zahtevaju:

- razmatranje mnogo komplikovanijih oblika jednačine prenosa (napr. multidimenzioni prenos zračenja (3D) u pokretnim sredinama, prenos polarizovanog zračenja, itd.)
- razvoj novih, efikasnih (tačnih i brzih) algoritama za rešavanje prenosa zračenja (sve veća saradnja astrofizičara i matematičara).

Table 1 The radiative transfer equation for important geometries and velocity fields as derived from the transformations described in Sect. 3.1

#	Geometry	Motion	Transfer equation
1	2 stream	no	$\pm \frac{dI^\pm(s,\lambda)}{ds} = -(\kappa(s,\lambda) + \sigma(s,\lambda))I^\pm(s,\lambda) + \eta(s,\lambda)$
2	plane-p.	no	$\mu \frac{dI(z,\lambda,\mu)}{dz} = -(\kappa(z,\lambda) + \sigma(z,\lambda))I(z,\lambda,\mu) + \eta(z,\lambda)$
3	spher.-s.	no	$\mu \frac{dI(r,\lambda,\mu)}{dr} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I(r,\lambda,\mu)}{\partial \mu} = -(\kappa(r,\lambda) + \sigma(r,\lambda))I(r,\lambda,\mu) + \eta(r,\lambda)$
4	3D	no	$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{x},\lambda,\mathbf{n}) = -(\kappa(\mathbf{x},\lambda) + \sigma(\mathbf{x},\lambda))I(\mathbf{x},\lambda,\mathbf{n}) + \eta(\mathbf{x},\lambda)$
5	2 stream	very slow	$\pm \frac{dI^\pm(s,\xi)}{ds} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial I^\pm(s,\xi)}{\partial \xi} = -(\kappa(s,\xi) + \sigma(s,\xi))I^\pm(s,\xi) + \eta(s,\xi), \beta = v/c$
6	plane-p.	very slow	$\mu \frac{\partial I(z,\xi,\mu)}{\partial z} + \mu^2 \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial I(z,\xi,\mu)}{\partial \xi} = -(\kappa(z,\xi) + \sigma(z,\xi))I(z,\xi,\mu) + \eta(z,\xi)$
7	spher.-s.	very slow	$\mu \frac{dI(r,\xi,\mu)}{dr} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I(r,\xi,\mu)}{\partial \mu} + \mu^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial I(r,\xi,\mu)}{\partial \xi} = -(\kappa(r,\xi) + \sigma(r,\xi))I(r,\xi,\mu) + \eta(r,\xi)$
8	3D	very slow	$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{x},\xi,\mathbf{n}) + w \frac{\partial I(\mathbf{x},\xi,\mathbf{n})}{\partial \xi} = -(\kappa(\mathbf{x},\xi) + \sigma(\mathbf{x},\xi))I(\mathbf{x},\xi,\mathbf{n}) + \eta(\mathbf{x},\xi)$
9	2 stream	relativ.	$\frac{\partial \mathcal{I}^\pm(s,\xi)}{\partial s} \pm \gamma^2 \frac{d\beta}{ds} \frac{\partial \mathcal{I}^\pm(s,\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\gamma(\beta \pm 1)} (-\chi(s,\xi)\mathcal{I}^\pm(s,\xi) + \eta(s,\xi)),$ $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$
10	plane-p.	relativ.	$\frac{\partial \mathcal{I}(z,\mu,\xi)}{\partial z} - (1 - \mu^2)\gamma^2 \frac{d\beta}{dz} \frac{\partial \mathcal{I}(z,\mu,\xi)}{\partial \mu} + \gamma^2 \mu \frac{d\beta}{dz} \frac{\partial \mathcal{I}(z,\mu,\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\gamma(\mu + \beta)} (-\chi(z,\xi)\mathcal{I}(z,\mu,\xi) + \eta(z,\xi))$
11	spher.-s.	relativ.	$\frac{\mu + \beta}{1 + \beta\mu} \frac{\partial \mathcal{I}(r,\mu,\xi)}{\partial r} + (1 - \mu^2) \left(\frac{1}{r} - \gamma^2 \frac{\mu + \beta}{1 + \beta\mu} \frac{d\beta}{dr} \right) \frac{\partial \mathcal{I}(r,\mu,\xi)}{\partial \mu} + \left(\frac{\beta}{1 + \beta\mu} \frac{1 - \mu^2}{r} + \gamma^2 \frac{\mu(\mu + \beta)}{1 + \beta\mu} \frac{d\beta}{dr} \right) \frac{\partial \mathcal{I}(r,\mu,\xi)}{\partial \xi} = \frac{-\chi(z,\xi)\mathcal{I}(z,\mu,\xi) + \eta(z,\xi)}{\gamma(1 + \beta\mu)}$
12	3D	relativ.	$\frac{(\mathbf{n}_0 + \gamma(1 + \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{n}_0 \cdot \beta)\beta)^T}{\gamma(1 + \mathbf{n}_0 \cdot \beta)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \right) I(\mathbf{x},\mathbf{n}_0,\lambda_0) = -\chi(\mathbf{x},\lambda_0) (I(\mathbf{x},\mathbf{n}_0,\lambda_0) - \eta(\mathbf{x},\lambda_0))$ $\frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial \beta} = \gamma \left((\mathbf{n}_0\rangle \langle \mathbf{n}_0 - \mathbf{E}) + \frac{\gamma}{\gamma+1} (\mathbf{n}_0\rangle \langle \beta - \langle \mathbf{n}_0 \beta\rangle \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\beta\rangle \langle \beta - \langle \mathbf{n}_0 \beta\rangle \beta\rangle \langle \mathbf{n}_0) \right)$ $\frac{\partial \lambda_0}{\partial \beta} = \gamma \left(\mathbf{n}_0\rangle + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \langle \mathbf{n}_0 \beta\rangle \beta\rangle \right) \lambda_0$

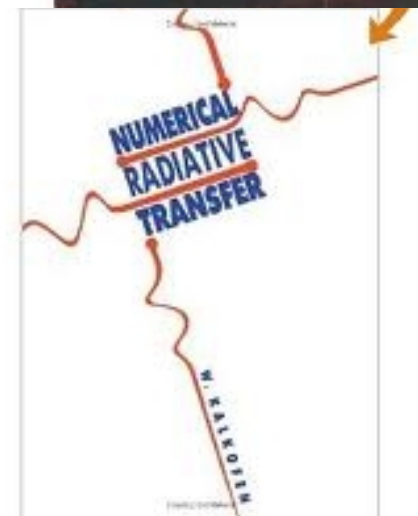
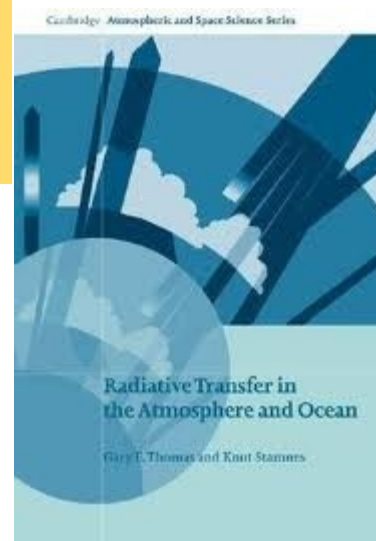
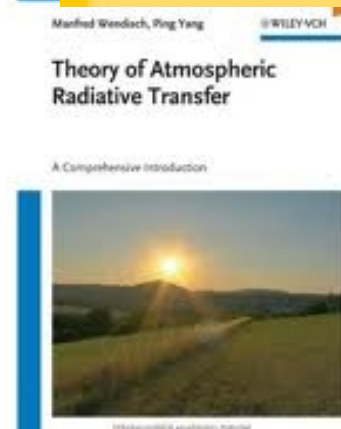
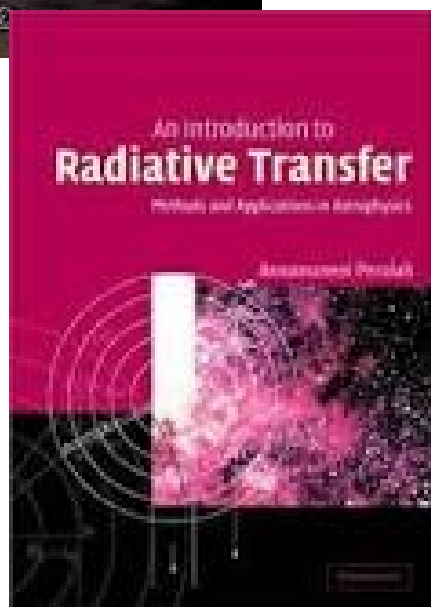
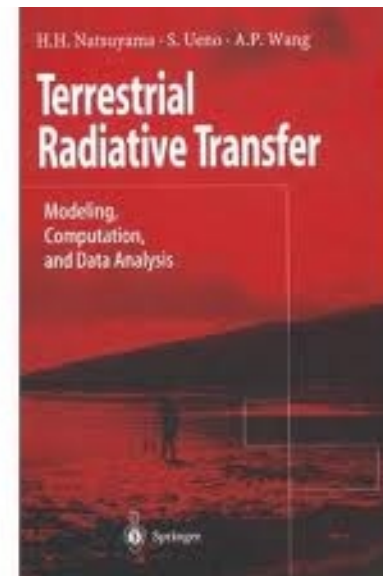
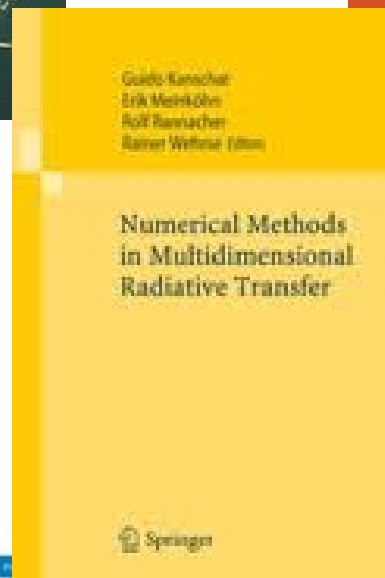
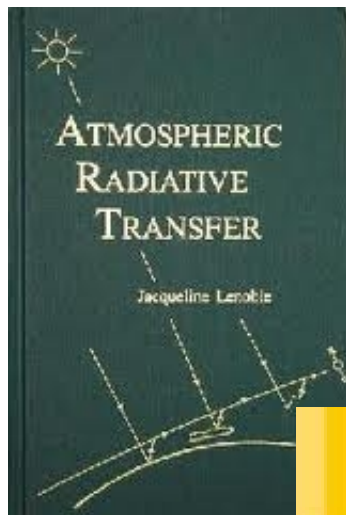
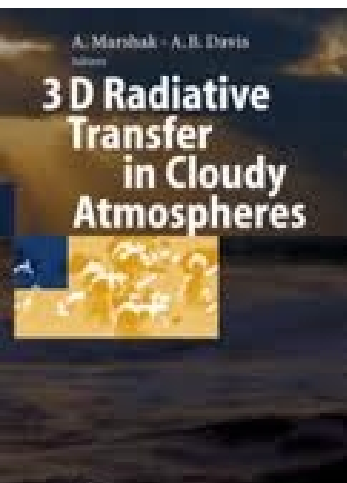
Wehrse & Kalkofen
“Advances in
radiative transfer”



Brzina konvergencije nekoliko iterativnih metoda koje rešavaju problem formiranja spektralnih linija atomima sa 2 nivoa

- **Lambda iteracija** – najjednostavnija, ali najsporija iterativna procedura
 - **ALI (Accelerated Lambda Iteration) metode** – metode ubrzane Lambda iteracije - Cannon (1973), Scharmer (1981), Olson, Auer & Buchler (1986), Rybicki & Hummer (1991)
 - **FBILI (Forth-and-Back Implicit Lambda Iteration)** – Atanacković-Vukmanović, Crivellari & Simonneau (1997), Atanacković-Vukmanović (2003), Milić, Pirković, Atanacković (....)
-
- **Metod iteracionih faktora** – Atanacković-Vukmanović & Simonneau (1994), Kuzmanovska-Barandovska & Atanacković (2010)

Samo neki od naslova ...



Zašto se bavimo ovim problemom?

“Pre 10 godina su me pitali zašto se još uvek bavimo zvezdanim atmosferama umesto da se okrenemo vangalaktičkoj astronomiji, oblasti koja je tada postala vrlo popularna. Moj odgovor je bio da svaki put kada treba da protumačimo spektar objekta koji je neprozračan bar na jednoj frekvenciji, da se srećemo sa problemom prenosa zračenja. Fizika, matematika i numerika koje stoje iza tog problema su toliko složeni da su sami programski kodovi medju najobimnijim poznatim kodovima. Kada bi prestalo da se radi na ovim problemima, bilo bi teško za kratko vreme obnoviti neophodno znanje.”

Hunger (1991)

Još razloga ...?

Rešavanje jednačine prenosa zračenja

Analitička rešenja postoje samo za najjednostavnije (nerealne) probleme – potrebno numeričko rešavanje.

Postoje razne numeričke metode, dele se na direktne i iterativne.

Veliki problemi u rešavanju jednačine prenosa zračenja su memorija i vreme potrebno za računanje.

Ako je funkcija izvora poznata (u opštem slučaju nije), intenzitet zračenja je dat kao:

$$I_{x\mu}^{-}(\tau_l) = \int_0^{\tau_l} S(t) e^{-(\tau_l - t)\varphi_x/\mu} \frac{dt\varphi_x}{\mu}$$

$$I_{x\mu}^{+}(\tau_l) = \int_{\tau_l}^{\infty} S(t) e^{-(t - \tau_l)\varphi_x/\mu} \frac{dt\varphi_x}{\mu}$$

Odnosno za konačan sloj u drugom integralu gornja granica je debljina sloja umesto ∞ .

Umesto kontinualnih vrednosti promenljivih moramo da uzmemo diskretne (N dubina, NF frekvencija i NM pravaca).

Pretpostavimo oblik funkcije izvora (npr linearna ili kvadratna funkcija optičke dubine) između 2 bliske tačke na nekom pravcu i onda integral rešavamo analitički. Dobijamo:

$$I_{x\mu}^{-}(\tau_l) = I_{x\mu}^{-}(\tau_{l-1})e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-(\tau_l-t)\varphi_x/\mu} \frac{dt\varphi_x}{\mu}$$

$$I_{x\mu}^{+}(\tau_{l-1}) = I_{x\mu}^{+}(\tau_l)e^{-\Delta\tau_l\varphi_x/\mu} + \int_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} S(t)e^{-(t-\tau_{l-1})\varphi_x/\mu} \frac{dt\varphi_x}{\mu}$$

Granični uslovi:

Konačan sloj

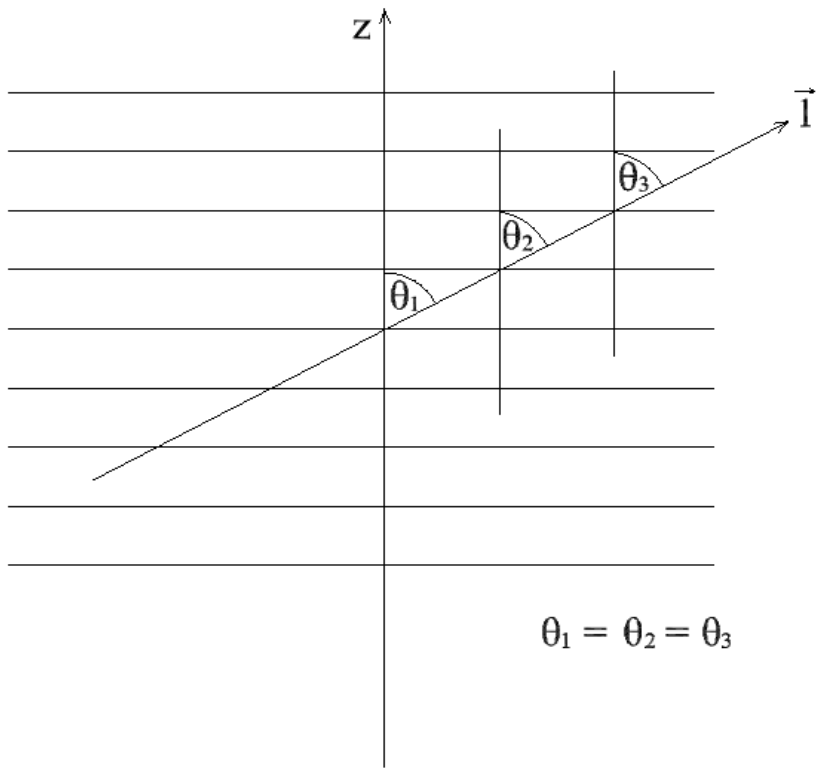
$$\tau_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad I_\nu^-(0, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu < 0)$$

$$\tau_\nu = T_\nu \quad \Rightarrow \quad I_\nu^+(T_\nu, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = T_\nu, \mu > 0)$$

Polubeskonačna atmosfera

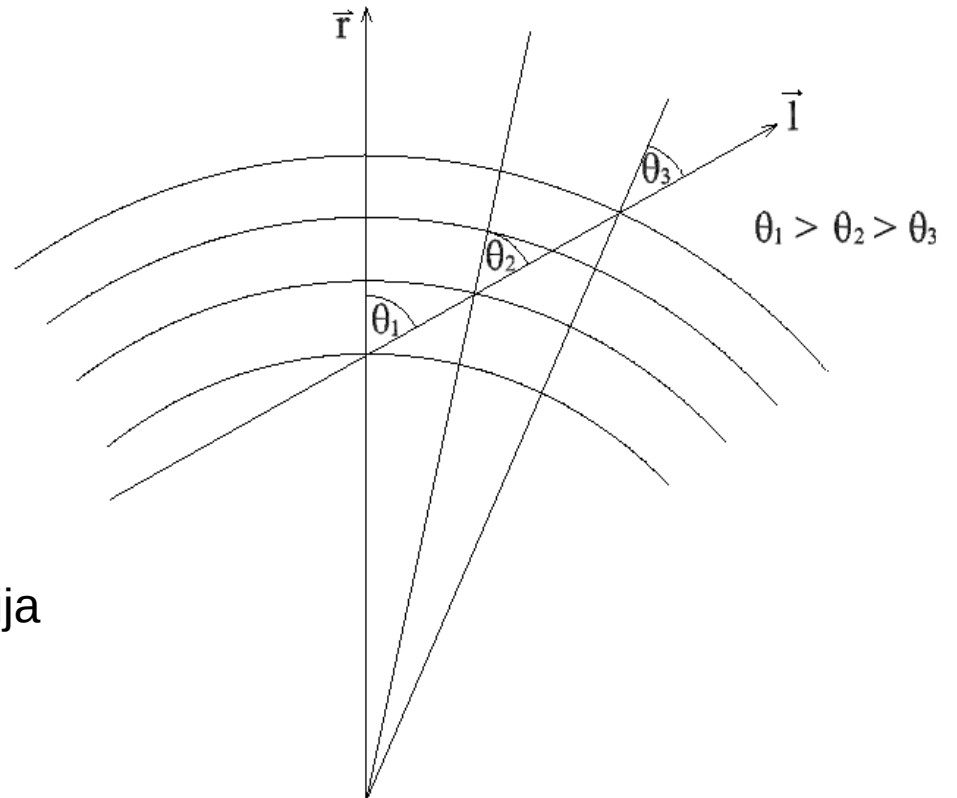
$$\tau_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad I_\nu^-(0, \mu) = 0$$

$$\tau_\nu \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad I_\nu(\tau_\nu, \mu) = S_\nu(\tau_\nu) + \mu dS_\nu/d\tau_\nu$$



Plan-paralelna geometrija

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$$

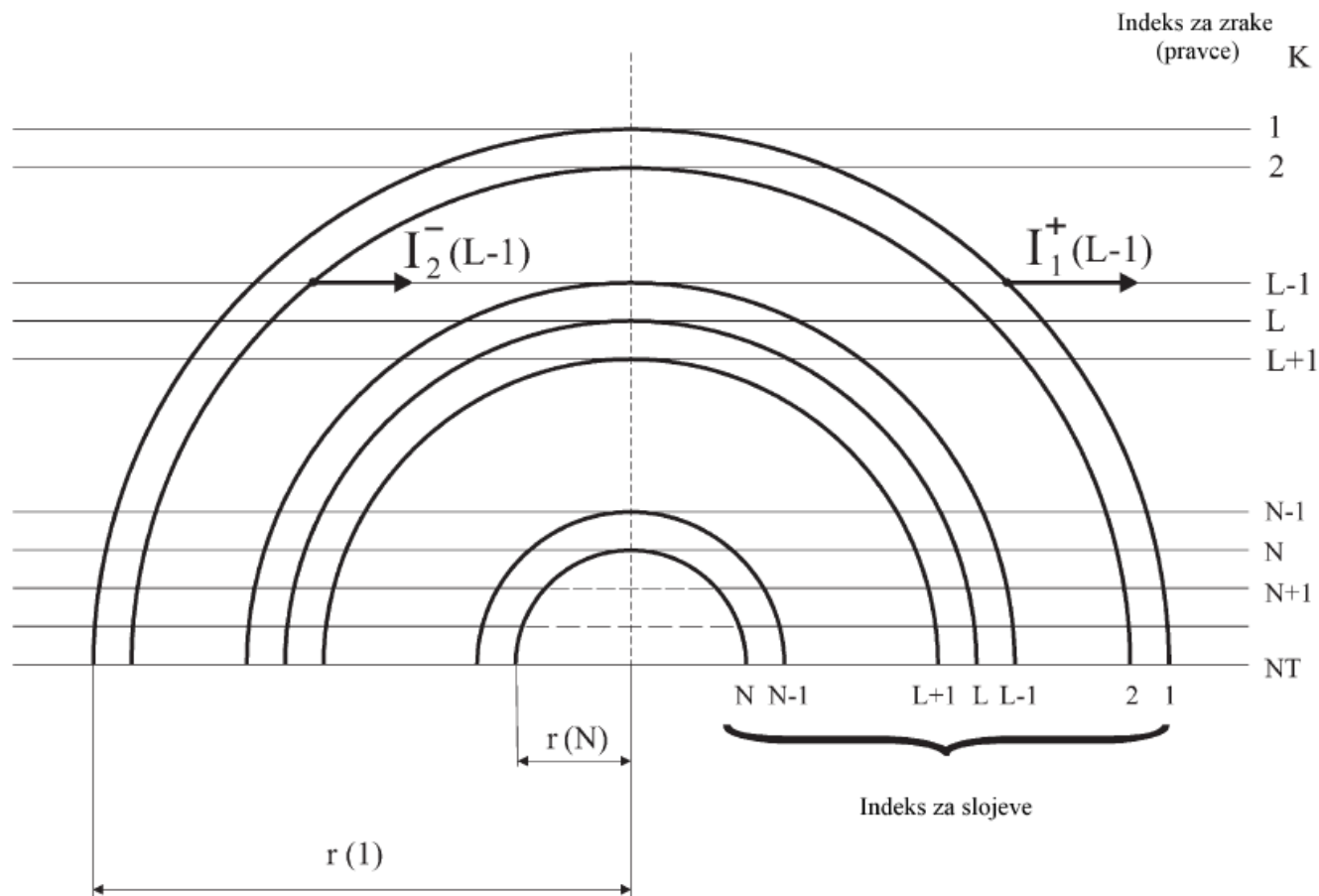


sferna geometrija

$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$$

Plan-paralelna geometrija, stacionarnost, statičnost, azimutalna simetrija, 2 level, siva atmosfera – najjednostavniji slučaj

U sfernoj geometriji ugao pod kojim jedan zrak seče slojeve nije konstantan – potrebno je više tačaka za pravce



Parcijalna redistribucija – emisioni i apsorpcioni profil nisu jednaki

Multi level atom – zavisnost naseljenosti nivoa od polja zračenja u liniji nije eksplicitna

Pokretna sredina – profil (i funkcija izvora) zavisi od pravca, dubine I frekvencije.
Primer: P Cygni, WR, SN...

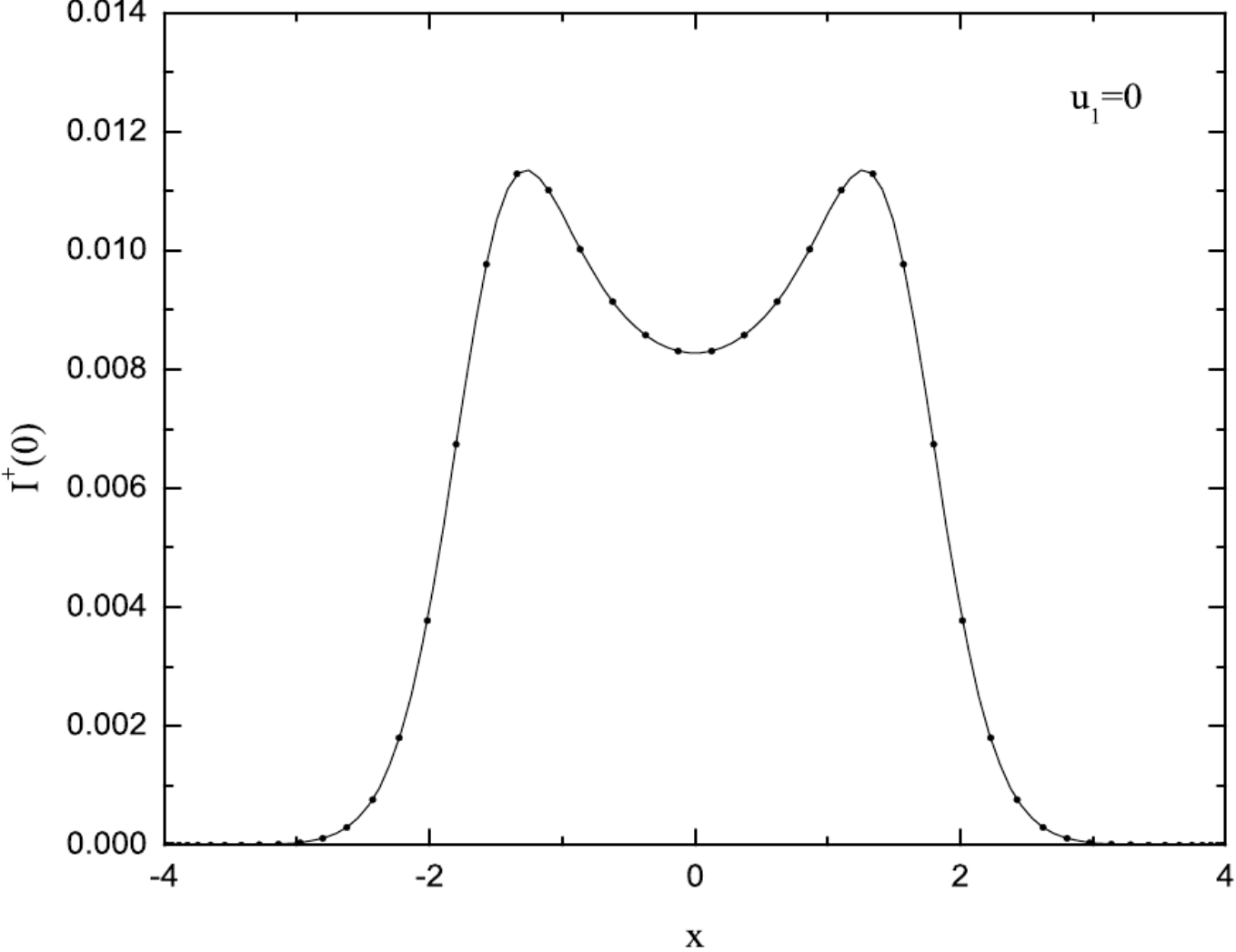
Primer pokretne sredine:

Konačan (izotermni) sloj u širenju u plan-paralelnoj geometriji

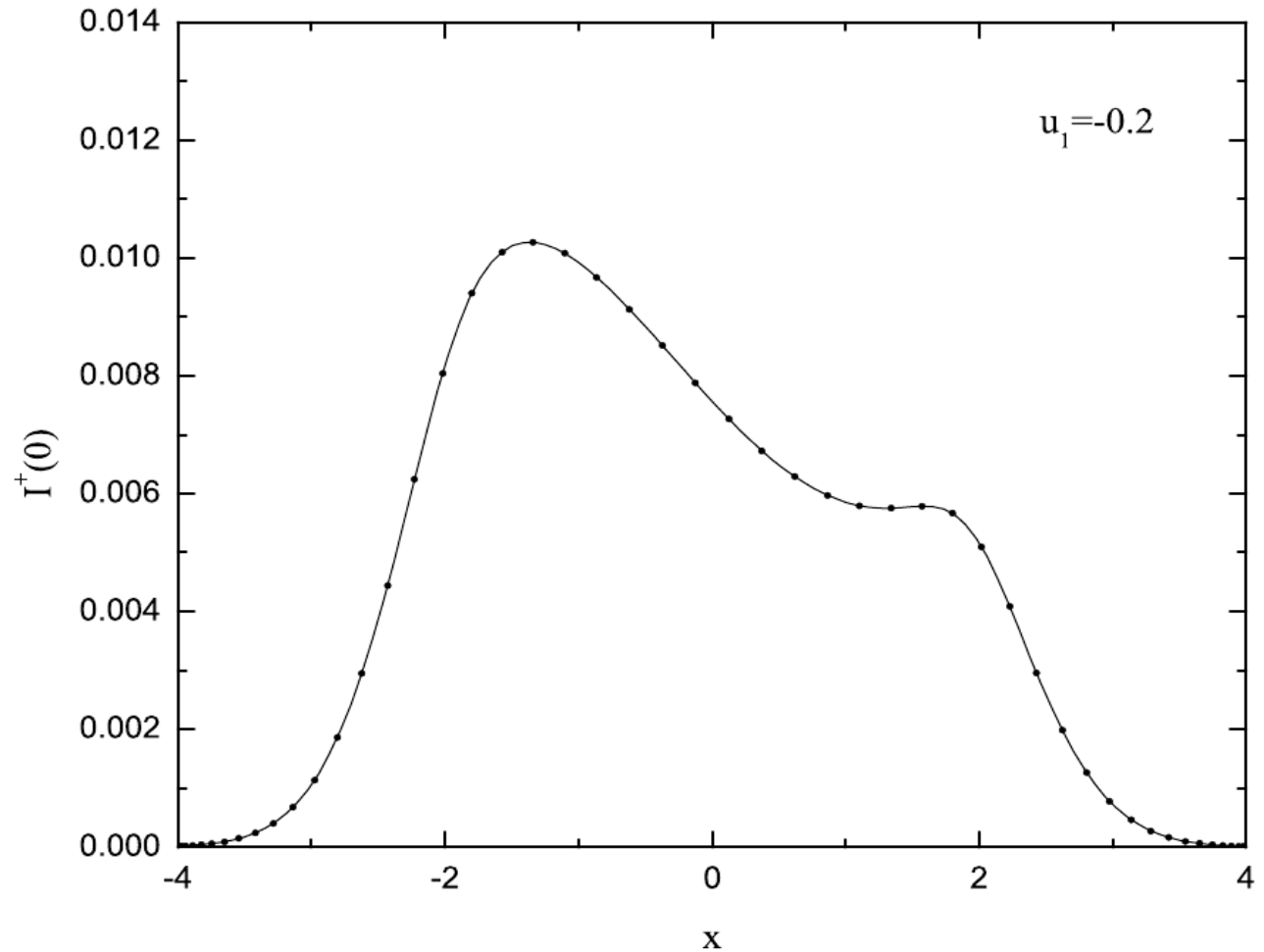
Bliži deo nam se približava, dalji se udaljava, centralni deo miruje (emisiona maglina u širenju)



Linija bez kretanja



Sa kretanjem:

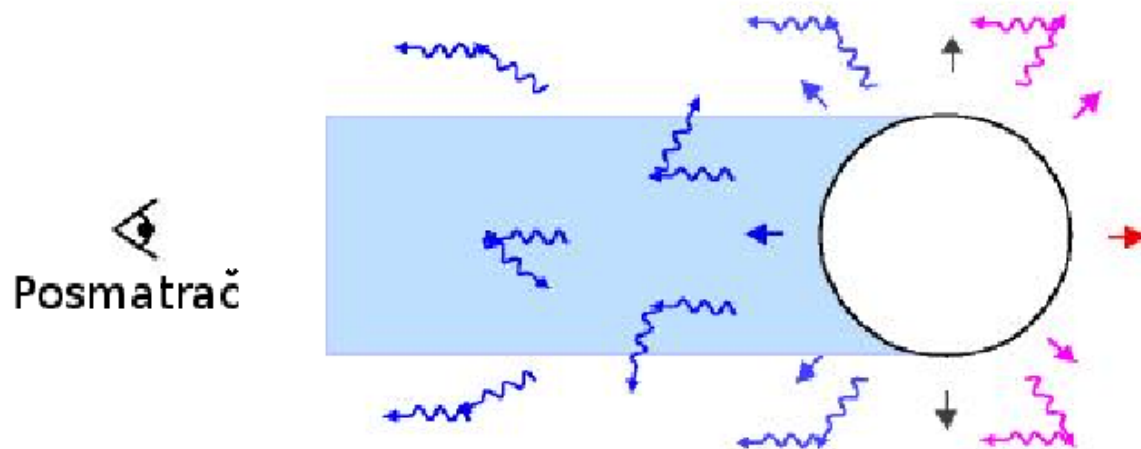


Cela linija izgleda pomerena ka crvenom iako je srednja brzina 0 – ne možemo a priori pretpostaviti da se mali crveni pomaci odnose obavezno na emiter koji se udaljava

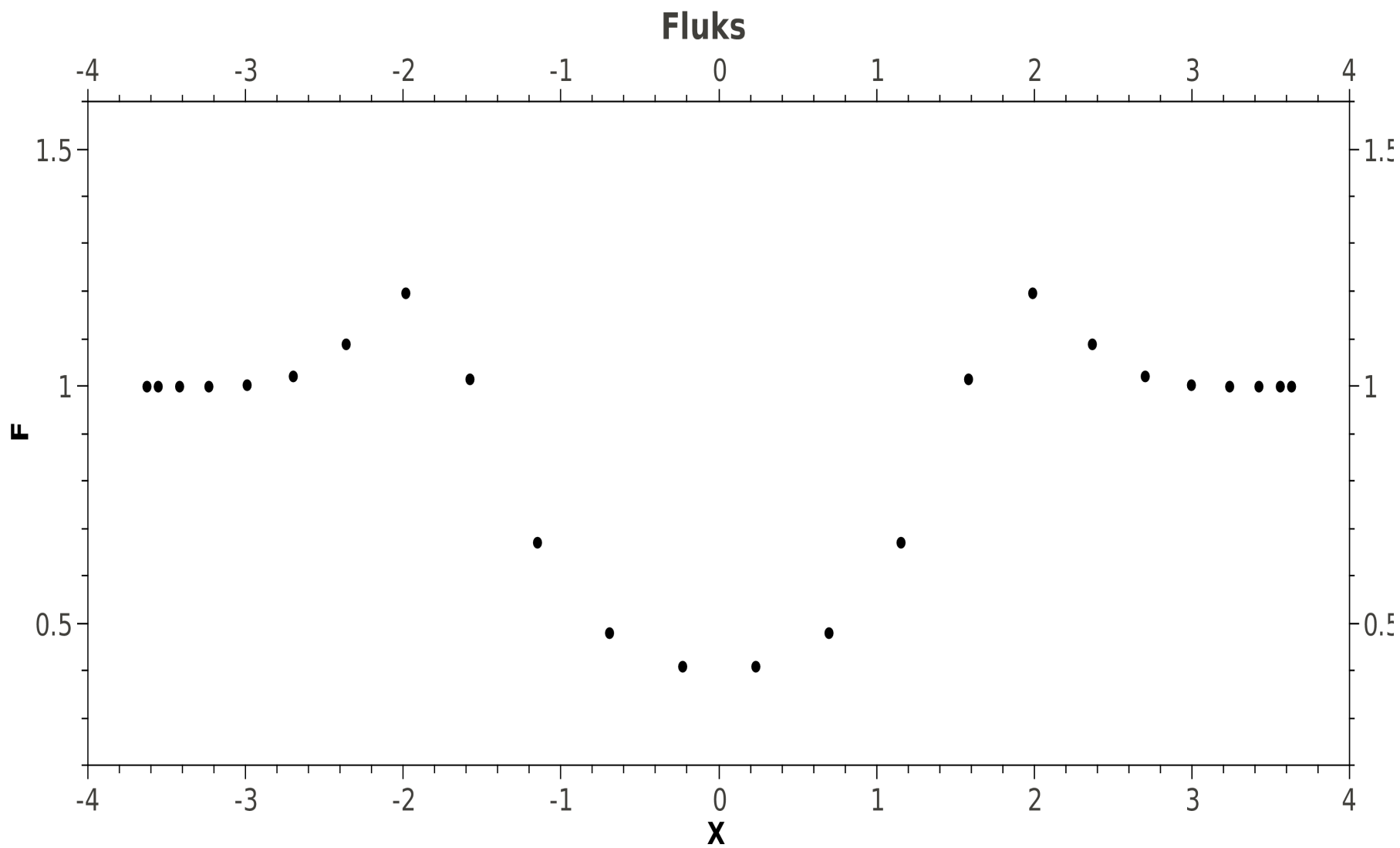
Potrebno rešiti jednačinu prenosa

Primer pokretne sredine:

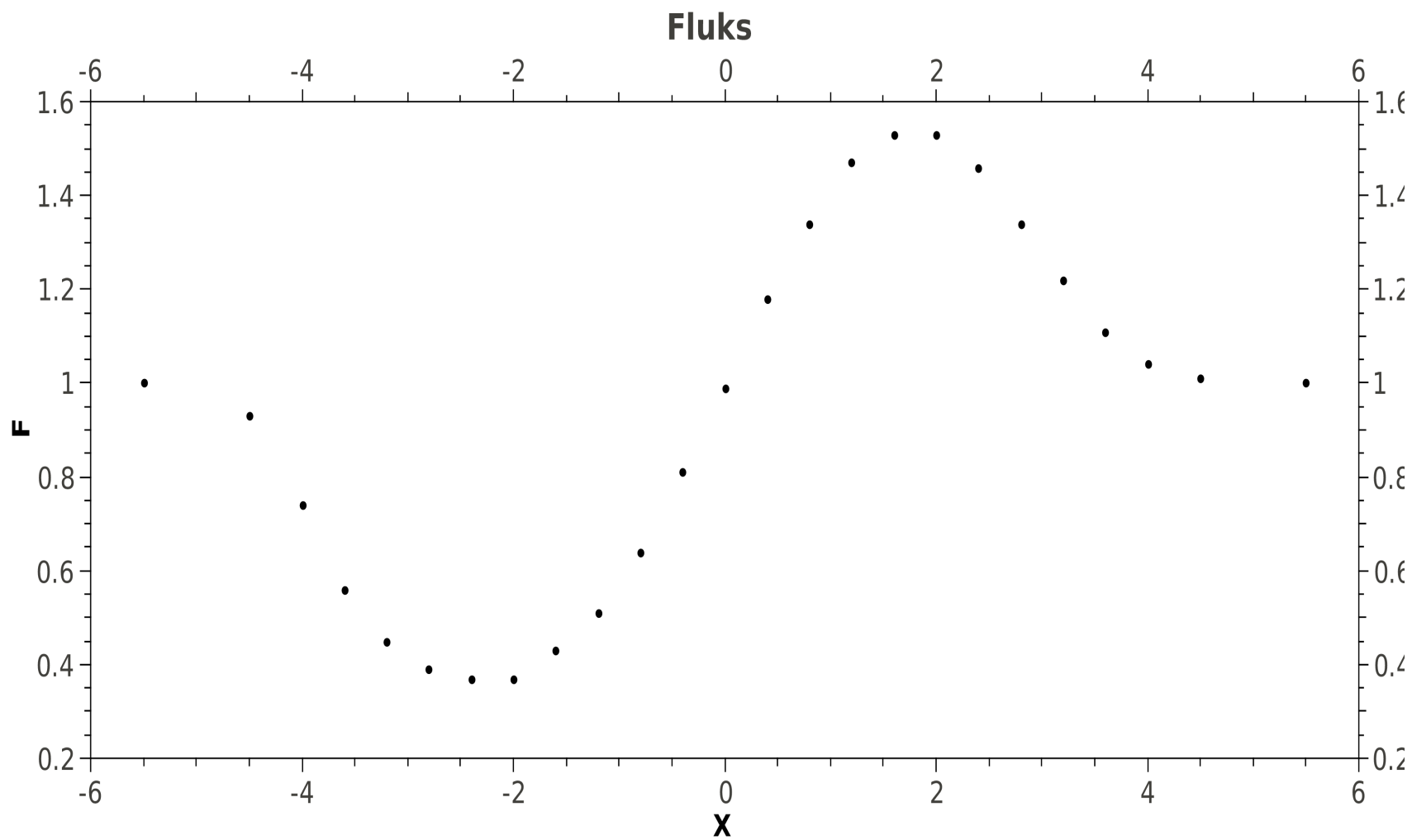
Sferna atmosfera u širenju

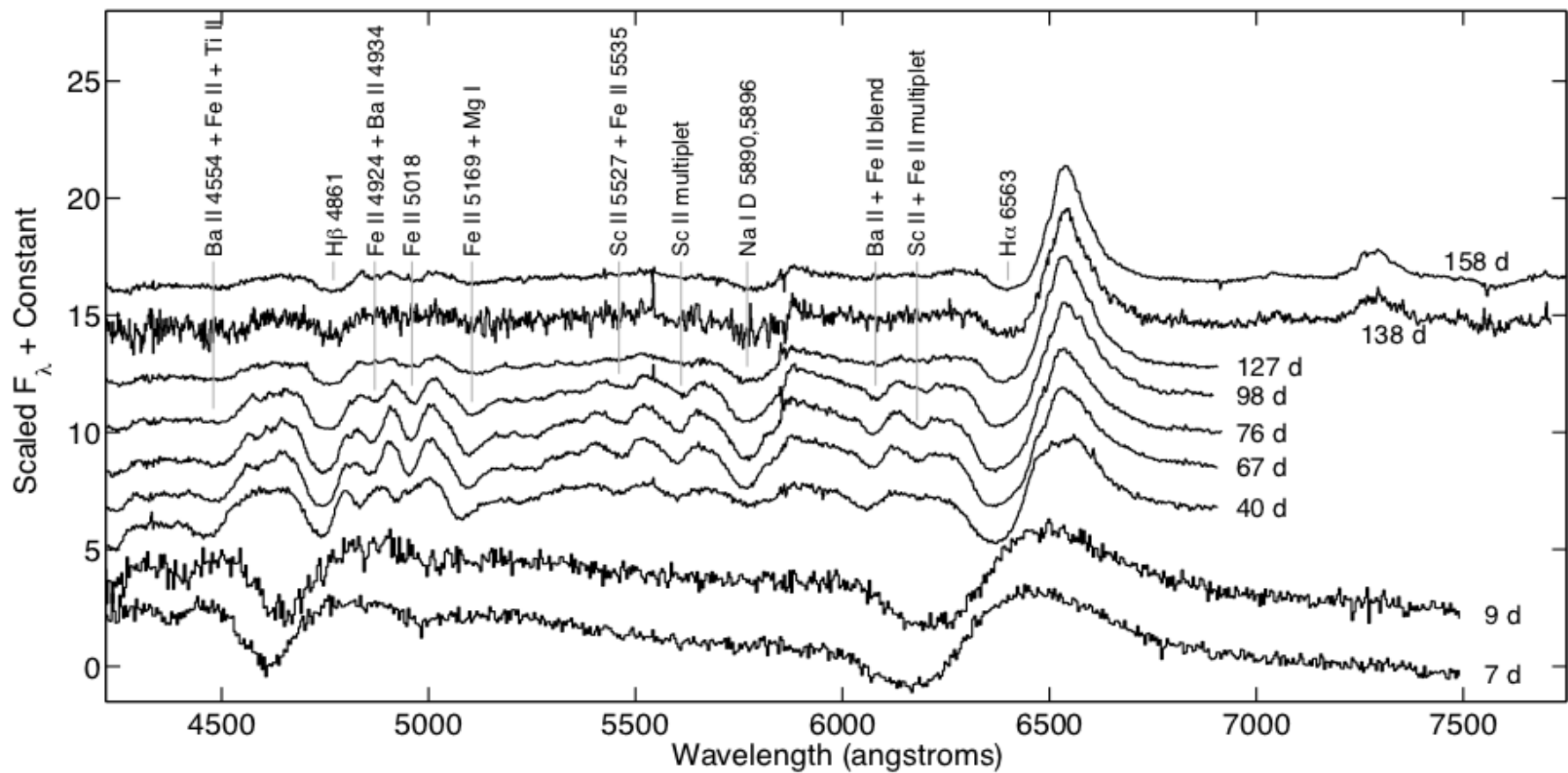
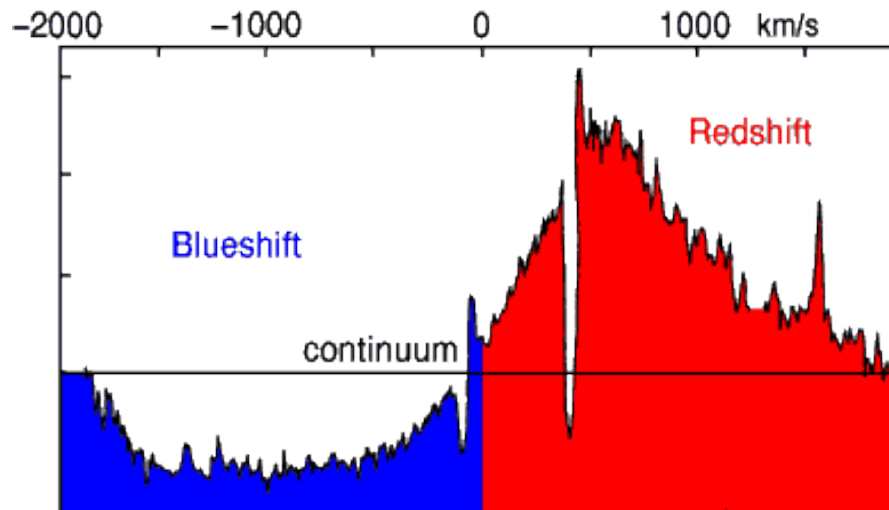


Bez kretanja:



Sa kretanjem:





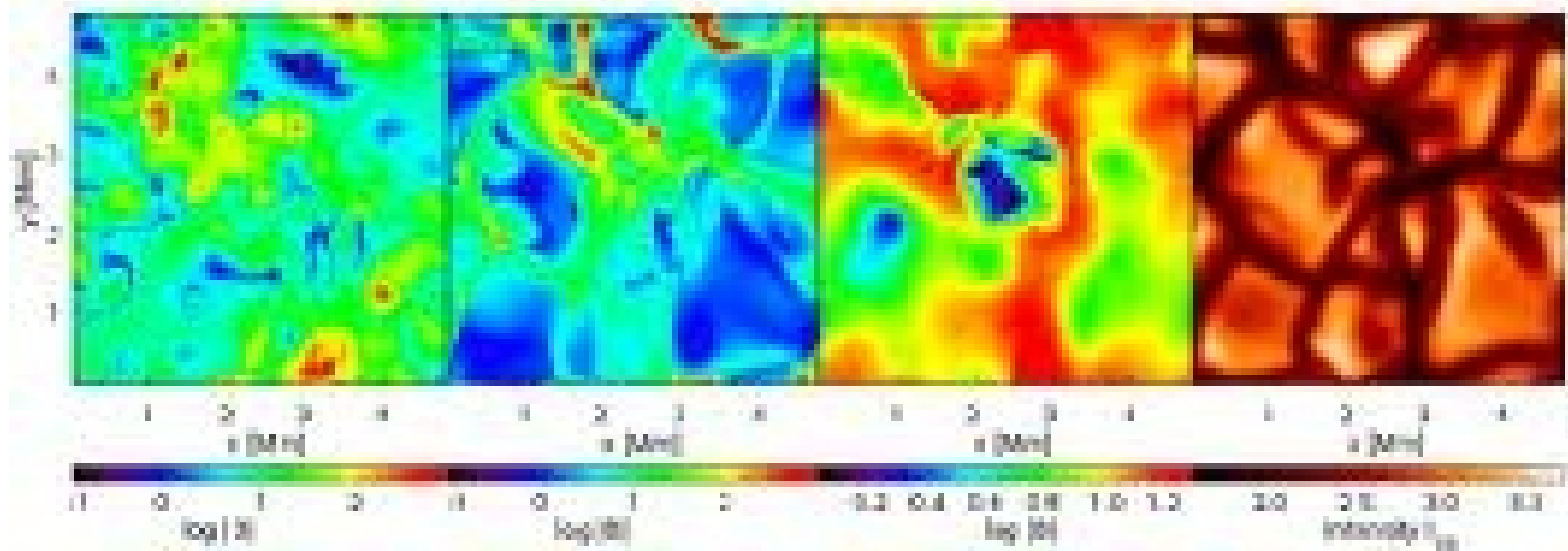
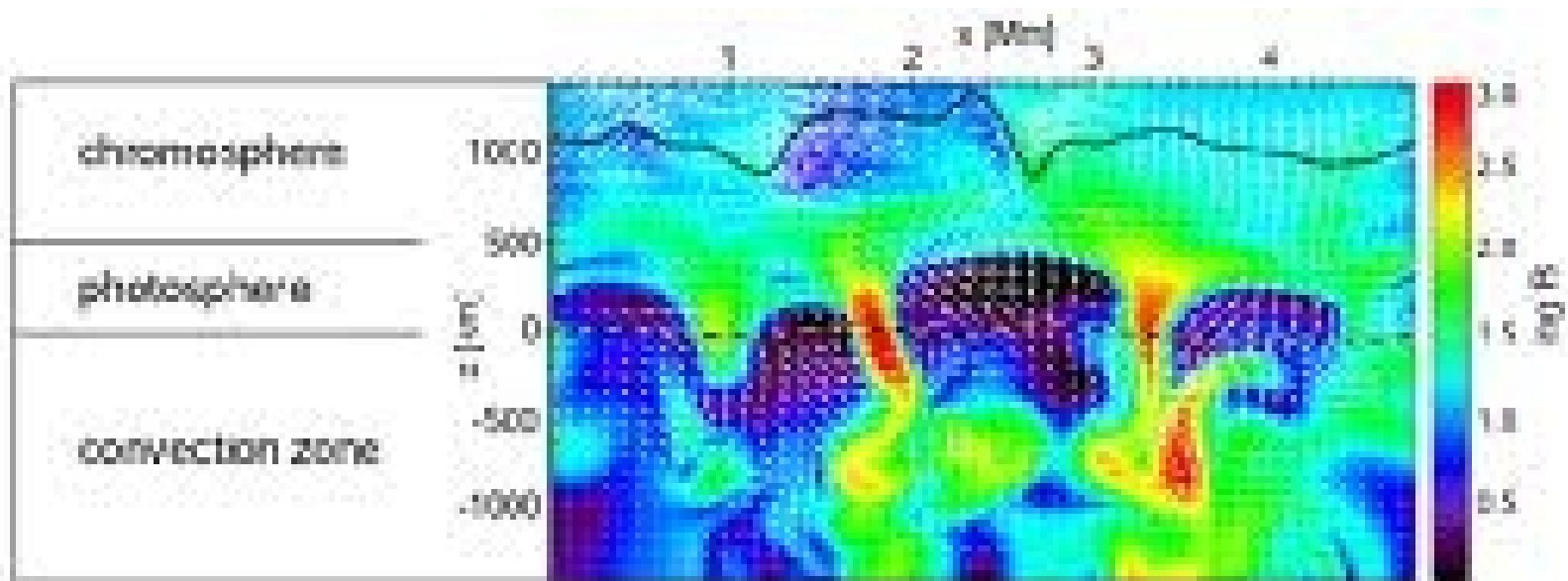
Sve ovo je bilo za slučajeve u kojima pretpostavimo azimutalnu simetriju za polje zračenja.

Ako hoćemo da proučavamo neke komplikovanije strukture to nije dobra aproksimacija.

Prenos zračenja u više dimenzija

Zašto?

- Videli smo da 1D geometrija podrazumeva da sve fizičke karakteristike zavise samo od jedne koordinate.
- Ovo **nikada** nije apsolutno tačno, ali nekada usrednjavanje “radi” (npr. semiempirijski modeli atmosfere)
- Ali nekada je prosto nemoguće!
- Primeri: pege, diskovi, protuberance, turbulencija, galaksije...
- Takodje, usrednjavanje se razlikuje od “tačnog” multi-D rešenja

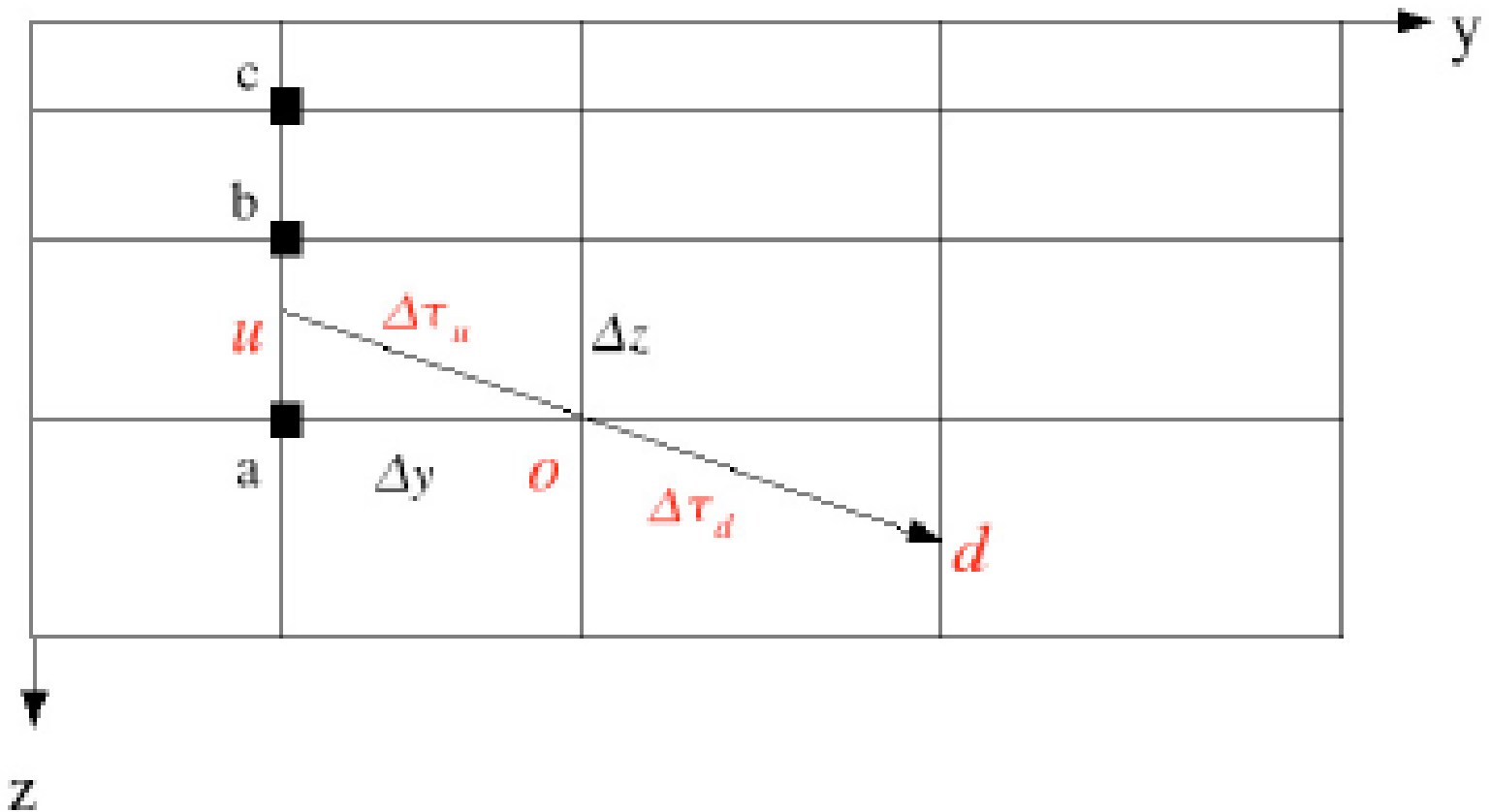


Šta se komplikuje?

- Zadržimo se na 2D slučaju, gde je model opisan pravouganim “gridom”...
- Broj tačaka kroz koje treba proći raste kvadratno
- Takodje, broj uglova koje razmatramo raste kvadratno
- Dakle iz $N \times NM \times NF \rightarrow N \times N \times NM \times NM \times NF$ promenljivih za opis specifičnog intenziteta
- I možda najveći problem: *interpolacija*

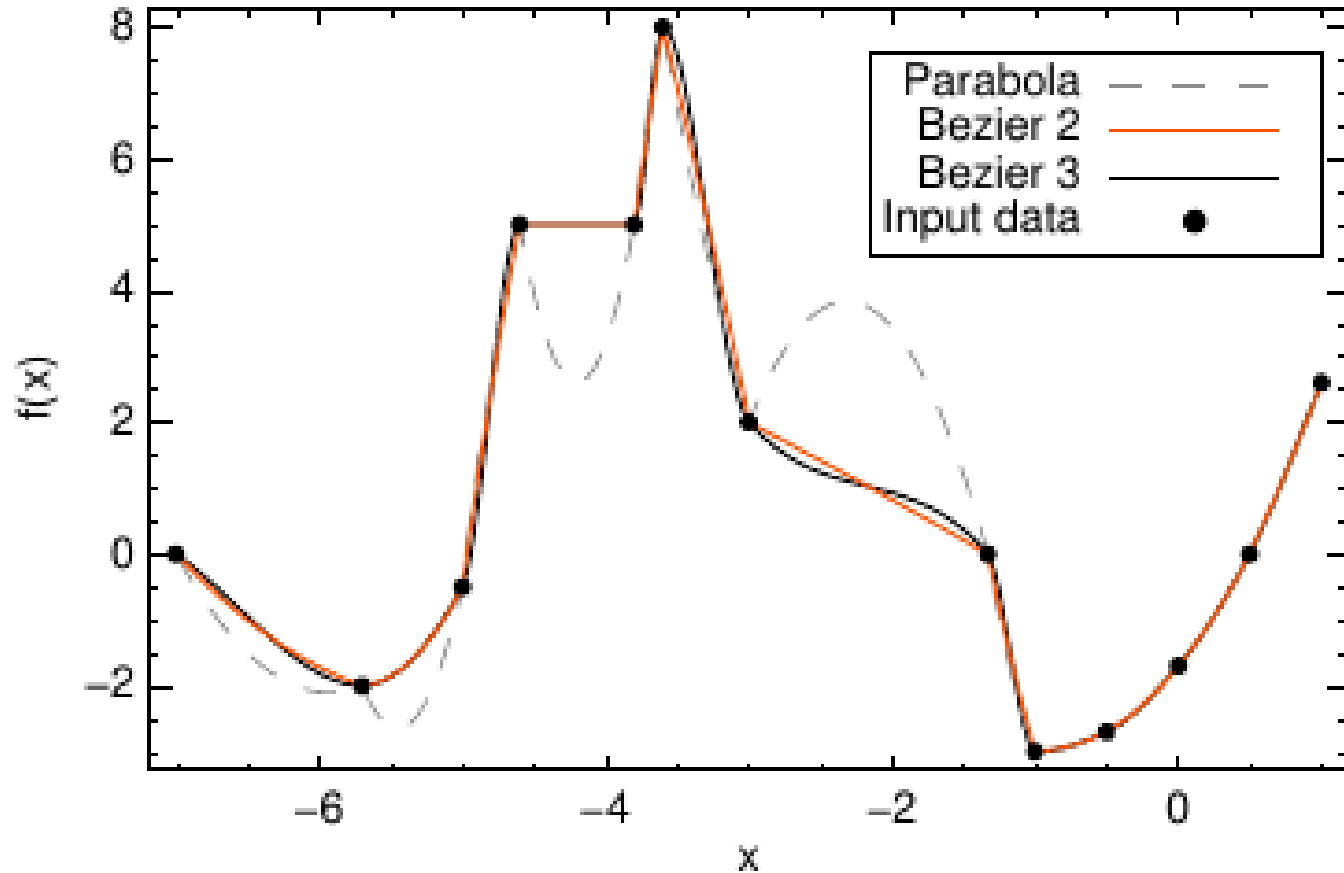
(→ *tabla*)

Za uz tablu



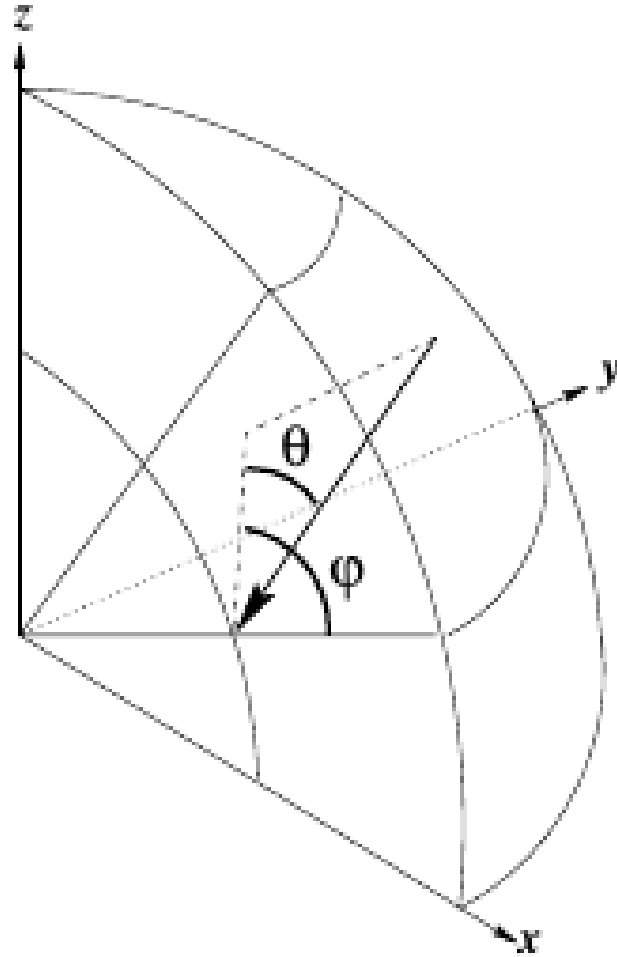
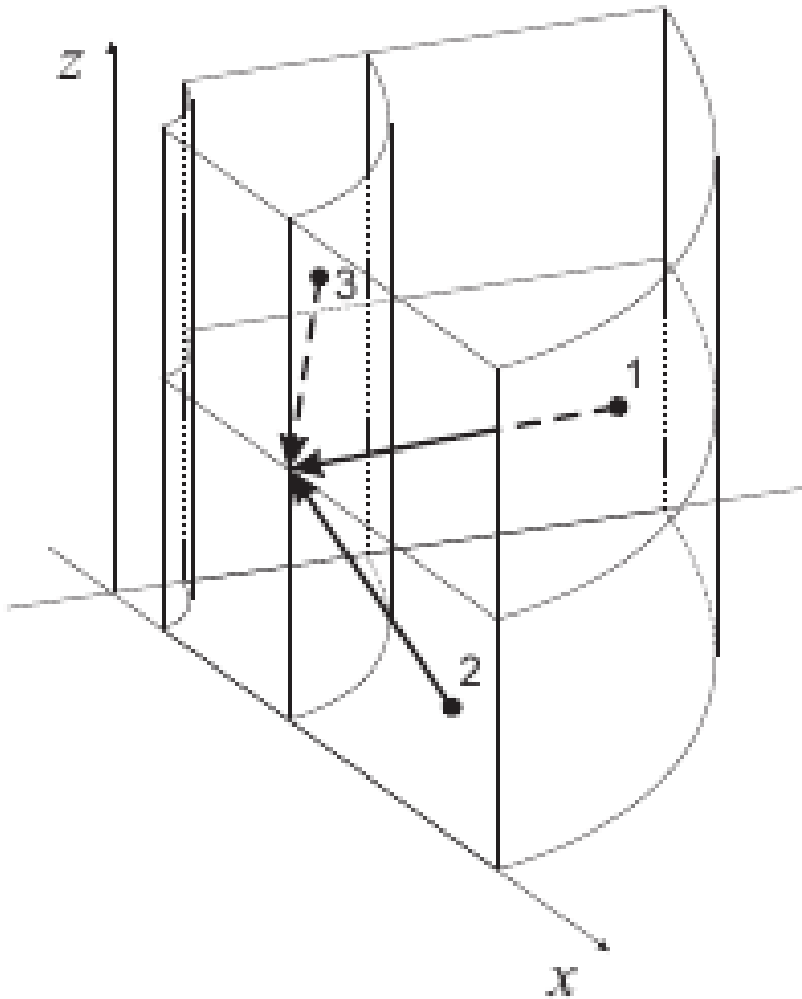
Leger et al. 2007, A&A, 470, 1

Kako interpolirati?



de la Cruz Rodriguez & Piskunov, 2013, ApJ, 764, 33

Postoje i druge geometrije...

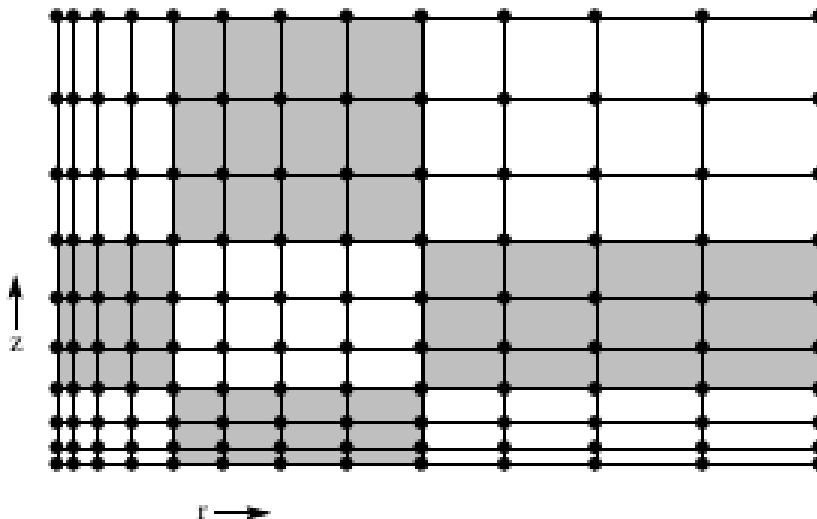


Koji metod za iterativno rešenje?

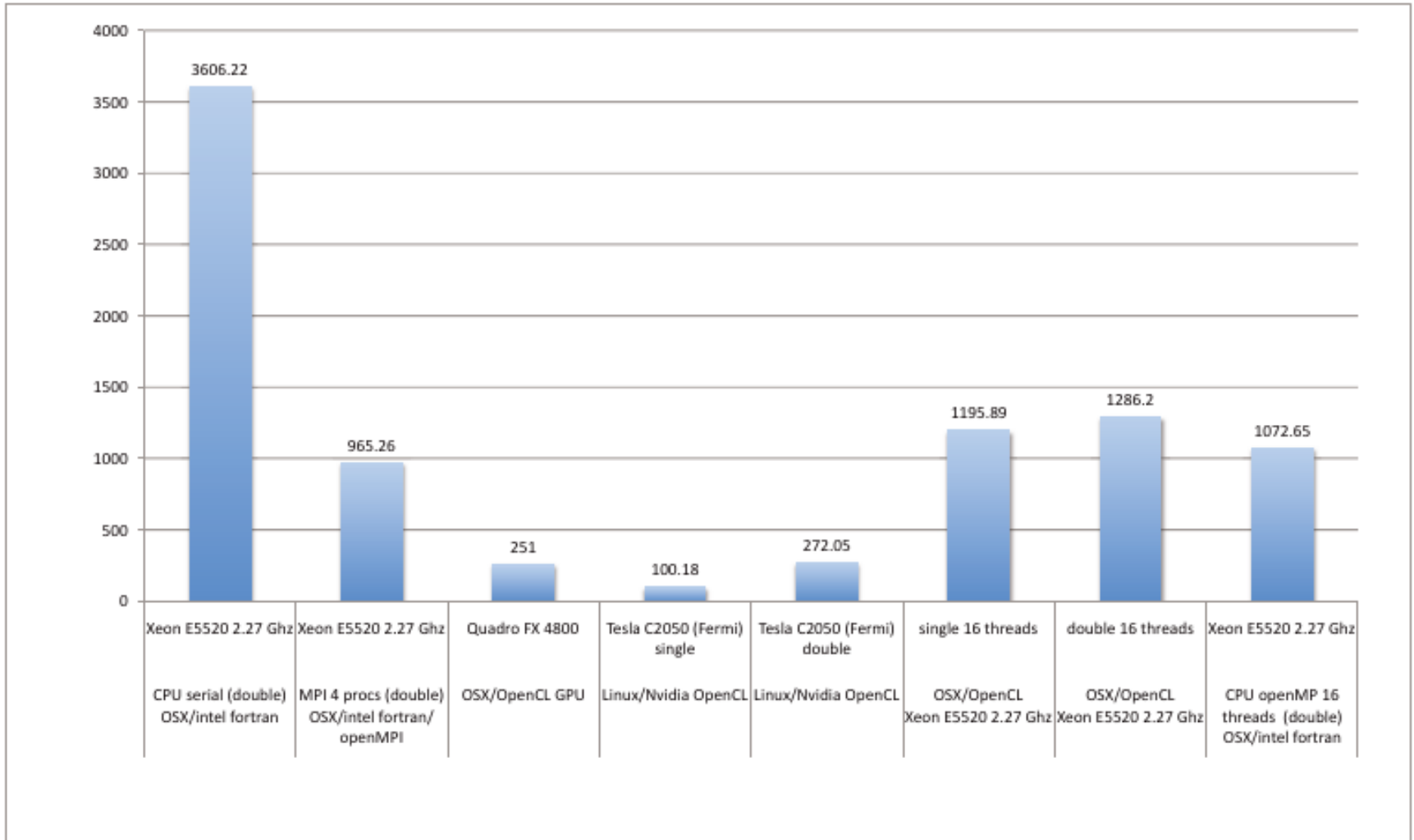
- Jacobi – najkorišćeniji, može se paralelizovati na mnogo načina
- G-S/SOR – nešto brži, ali ne toliko koliko je u 1D
- G-S/SSOR – *nije isproban?*
- Multigrid – deluje najbolje (pozajmljen iz MHDa)
- Iteracioni faktori / FBILI – strpimo se još malo :)

Paralelizacija

- Čak i sa dinamičkom alokacijom nepotrebnih intenziteta (→ tabla), memorija je problem
- Paralelizacija po frekvencijama ili po uglovima je trivijalna, ali ne rešava problem memorije već samo brzine (potrebno je da svaki thread/procesor/računar čuva “generalne” podatke o gridu)
- van Noort et al. (2002) – *prostorna* paralelizacija



Za entuzijaste - GPU



Hauschildt & Baron, 2011, A&A, 533, A127

Budućnost

- Adaptive mesh refinement

